System Engineering and Productivity/ 2025/ Vol.5/ No.1/ 51-64

System Engineering and Productivity

DOI: 10.22034/sep.2025.2046743.1238

Double Sampling-based ridge Penalized Likelihood Ratio Control Charting Scheme for Detecting the Covariance Matrix Disturbances

Zeinab Iji[1], Mohammad Reza Maleki[2*], Hossein Eghbali[3]

[1] Ph.D. Student, Department of Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran

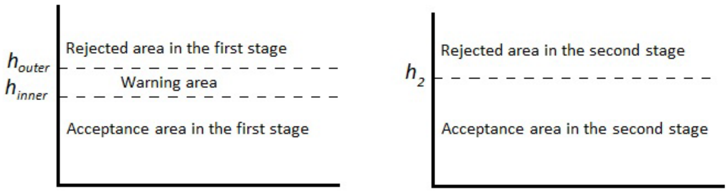
[2] Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology, Golpayegan, Iran

[3] Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran

HIGHLIGHTS

- Monitoring the dispersion matrix of high-dimensional processes in phase 2.
- Equipping the edge-compensated likelihood ratio diagram for double sampling
- Discovery of any dichotomy of sparse and non-scattered changes of the covariance matrix

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 25 November 2024
Revised: 20 December 2024
Accepted: 25 January 2025
Available online: 25 January 2025
*Correspondence: m.maleki@iut.ac.ir

How to cite this article:
Iji, Z., Maleki, M.R., Eghbali, H. (2025) Double sampling-based ridge penalized likelihood ratio control charting scheme for detecting the covariance matrix disturbances. *System Engineering and Productivity.* 5(1), 51-64.

Keywords:
Statistical quality control
Double sampling
Covariance matrix
High-dimensional data
Ridge penalized likelihood ratio

ABSTRACT

Given the manufacturer's obligation to meet expectations and financial constraints, monitoring a large number of quality characteristics with a limited sample size poses a significant challenge for researchers in statistical quality control. According to recent research, multivariate charts based on double sampling are developed under the assumption that the number of quality characteristics is less than the sample size. The objective of this paper is to monitor the dispersion matrix of high-dimensional processes using a combination of the ridge penalized likelihood ratio statistic and double sampling method. To evaluate the performance of the proposed chart, we first introduce seven out-of-control scenarios, which include three combined diagonal/non-diagonal patterns, two diagonal patterns, and two non-diagonal patterns. We then extract the run length properties and the expected value of the sample size associated with the proposed chart through simulation experiments. The simulation results indicate that, across all three pattern categories mentioned, the proposed chart's sensitivity in detecting disturbances in the covariance matrix improves as the magnitude of shifts in its components increases. The simulation results further indicate that as the number of components influenced by the assignable cause in the covariance matrix decreases, the proposed control chart can detect process disturbances over a longer period.

2538-2195/© 2026 The Authors. Published by University of Eyvanekey. This is an open-access article under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license.

1. Introduction

Double sampling, a two-stage monitoring system for determining process status, was initially proposed based on acceptance sampling literature and applied to statistical quality control. The procedure employs random samples in two passes to estimate a test statistic and enhance process monitoring effectiveness while decreasing the items examined (Daudin et al., 1990; Daudin, 1992). The recent research focuses mainly on double sampling strategies for control chart improvement. For example, Rozi et al. (2021) optimized a modification of the double sampling chart for reductions in the length of an out-of-control run. Maleki et al. (2023) investigated double sampling chart sensitivity under the effect of measurement error, and Lee et al. (2023) suggested a coefficient of variation monitoring chart. Advances in sensing and metrology technologies enabled industries to monitor high-dimensional quality characteristics relevant for the detection of abnormal process behaviors and improved product quality. In production, such as in semiconductor production, statistical process control reduces variability. In service industries, this monitoring of high-dimensional data contributes to the identification of fraud (e.g., credit card usage) and public health incident prevention. However, low sensitivity in multivariate control charts for process disturbances remains a challenge for low-dimensional data and especially high-dimensional data, a challenge defined by the "curse of dimensionality" (Jiang & Tsui, 2008).

This work presents a double sampling penalized likelihood ratio control chart for monitoring high-dimensional covariance matrices in Phase II such that sparse and non-sparse changes are captured in an effective manner. The major questions are as follows: What are the major constituents in the proposed chart? What are the performance advantages and limitations? How does double sampling contribute to improved effectiveness? In qualitative thematic analysis and Monte Carlo simulations, the performance of the chart is assessed at the level of average run length (ARL) and sample size.

2. Methodology

Despite the high efficiency of the dual sampling approach in improving the sensitivity of control charts to deviations with the occurrence cause and reducing the sampling cost by obtaining fewer observations in the long run, all the developed control charts available in the literature for monitoring high-dimensional processes have used simple random sampling. The innovation of this study is to equip the edge-compensated likelihood ratio control chart with the dual sampling approach to detect more quickly scattered changes in the elements of the covariance matrix of high-dimensional processes. In this section, we seek to equip the edge-compensated likelihood ratio chart with dual sampling with the aim of detecting step shifts in the components of the covariance matrix as quickly as possible. The qualitative study employs thematic analysis in constructing a penalized likelihood ratio control chart under double sampling for the monitoring of high-dimensional processes. The literature studies and expertise formed the gathered data and focused on statistical process control and high-dimensional data. The Monte Carlo simulations employed the chart's performance under seven different scenarios of being outside control in terms of performance metrics like ARL, standard deviation of run length (SDRL), median run length (MRL), and expected sample size (ESS). The study assumes the quality characteristics have a multivariate normal distribution such that the shift lies in the covariance matrix and not the mean vector.

3. Results and Discussion

Analysis and simulation uncovered distinct characteristics and running behaviors of the proposed penalized likelihood ratio control chart under double sampling for monitoring high-dimensional covariance matrices.

- The chart tracks changes in the covariance matrix by a two-stage double sampling plan. In Stage 1, a random sample is selected and a penalized likelihood ratio statistic is obtained. The process is in-control whenever the statistic lies in the acceptance region. When in the rejection region, an indication of the process being out-of-control is given. When in the warning region, a second sample is selected and a combined statistic decides the process condition. The control limits are chosen such that a given in-control ARL is obtained and the probability of Type I error is set (adjusted) (Daudin, 1992).
- Simulations in seven out-of-control scenarios (diagonal/non-diagonal, sparse/non-sparse shifts) revealed the chart efficiently identifies covariance changes. In non-sparse diagonal/non-diagonal shifts (Scenario 1), ARL decreased by 199.646 to 1.6782 while the shift magnitude rose by 0.75 from 0, showing

high sensitivity for larger shifts. The chart performs better than conventional multivariate charts, which are challenged by sparse variations in high-dimensionality scenarios (Salmasnia et al., 2023). Double sampling decreases ESS relative to straightforward sampling at the cost of reduced inspection while sustaining the power of detection.

- The sensitivity of the chart drops for sparse changes, and the ARL grows rapidly (e.g. 130.9786 for 4% component changes for Scenario 3). It is the "curse of dimensionality," such that sparse changes are more challenging in high dimensional space (Jiang & Tsui, 2008). The measurement and integration errors for legacy systems are also an issue, for which several measurement strategies are needed in order to reduce.
- Double sampling increases efficiency by decreasing ESS for non-sparse cases, as for large shifts, not as many second-stage samples are taken. In sparse cases, ESS grows proportionally with shift magnitude because the warning region gets triggered so often and a second sample is required. This compromise raises the speed of detection relative to the simple sampling charts for non-sparse shifts (Daudin et al., 1990).

4. Conclusions

Existing multivariate charts for monitoring high-dimensional processes can only be used when the number of variables is less than the sample size. In addition, existing multivariate charts do not perform well in detecting scattered changes in the covariance matrix. Another important issue is that late detection of changes in the covariance matrix of a high-dimensional process increases the costs of quality loss such as rework and warranty and leads to customer dissatisfaction. In this paper, a dual-sampling edge-compensated likelihood ratio chart was presented for monitoring high-dimensional processes in phase 2, which is capable of detecting scattered and non-scattered changes. Using Monte Carlo simulation in seven scenarios, the performance of this chart was examined with indicators such as trail length and sample size. The results showed that the proposed chart performs well in all scenarios and indicators. Implementing the proposed chart to monitor the output of wind turbines can be a practical suggestion that can help industry managers reduce quality costs.

Funding

This research received no external funding.

Author contributions

All authors have had equal roles and contributions to the article.

Conflicts of interest

There are no conflicts of interest associated with this research.

Acknowledgments

We are grateful to all colleagues who provided insights and expertise that greatly assisted this research. We also thank the anonymous reviewers for their valuable suggestions to improve the paper.

References

Daudin, J. J., Duby, C., & Trécourt, P. (1990). Plans de contrôle double optimaux (maîtrise des procédés et contrôle de réception). *Revue de Statistique Appliquée, 38*(4), 45–59.

Daudin, J. J. (1992). Double sampling $\bar{X}$ charts. *Journal of Quality Technology, 24*(2), 78–87. https://doi.org/10.1080/00224065.1992.11979379

Jiang, W., & Tsui, K. L. (2008). A theoretical framework and efficiency study of multivariate statistical process control charts. *IIE Transactions, 40*(7), 650–663. https://doi.org/10.1080/07408170701765953

Maleki, M. R., Shamseddin, B., Eghbali, H., & Bazdar, A. (2023). The effect of gauge measurement errors on double sampling $\bar{X}$ control chart. *Communications in Statistics–Theory and Methods, 52*(8), 2702–2717. https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1953056

Rozi, F., Pasaribu, U. S., Mukhaiyar, U., & Indrawati, I. (2021). Optimal design of a revised double sampling $\bar{X}$ chart based on median run length. *Journal of Hunan University Natural Sciences, 48*(7), 1–12.

Salmasnia, A., Maleki, M. R., & Mirzaei, M. (2023). Double sampling adaptive thresholding LASSO variability chart for Phase II monitoring of high-dimensional data streams. *Journal of Industrial Integration and Management, 8*(3), 365–386. https://doi.org/10.1142/S2424862222500170

مهندسی سیستم و بهره‌وری/ سال ۱۴۰۴/ دوره ۵/ شماره ۱/ صفحه ۵۱-۶۴

نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری

DOI: 10.22034/sep.2025.2046743.1238

نمودار نسبت درستنمایی تاوانیده مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه برای کشف تغییرات ماتریس کوواریانس

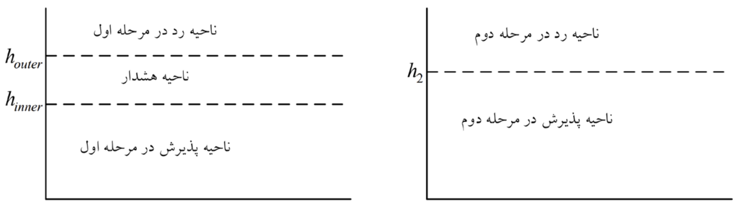
زینب ایجی[۱]، محمدرضا ملکی[۲]*، حسین اقبالی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران

[۲] استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، گلپایگان، ایران

[۳] استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- پایش ماتریس پراکندگی فرآیندهای با ابعاد بالا در فاز ۲
- تجهیز نمودار نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای به نمونه‌گیری دوگانه
- کشف هر دودسته تغییرات پراکنده و غیر پراکنده ماتریس کوواریانس

چکیده

با توجه به الزام تولیدکننده بر جلب رضایت مشتری و محدودیت‌های مالی، پایش تعداد زیاد مشخصه‌های کیفی با حداقل اندازه نمونه چالش مهمی است که محققین کنترل کیفیت آماری با آن مواجه هستند. بر اساس آخرین اطلاع مؤلف، نمودارهای چندمتغیره مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه با این فرض طراحی شده‌اند که تعداد مشخصه‌های کیفی از اندازه نمونه کوچک‌تر است. بنابراین، این مقاله برپایش ماتریس پراکندگی فرآیندهای ابعاد بالا بر مبنای یکپارچه‌سازی آماره نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای و تکنیک نمونه‌گیری دوگانه متمرکز می‌شود. به‌منظور بررسی عملکرد نمودار پیشنهادی ابتدا هفت سناریوی خارج از کنترل شامل سه الگوی توأم قطری/غیرقطری، دو الگوی قطری و دو الگوی غیرقطری معرفی شده و ویژگی‌های طول دنباله و همچنین امید ریاضی اندازه نمونه نمودار پیشنهادی بر اساس شبیه‌سازی استخراج می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی حاکی از آن است که تحت هر سه دسته الگوی ذکرشده، حساسیت نمودار پیشنهادی در کشف اختلالات ماتریس کوواریانس با افزایش بزرگی شیفت در مؤلفه‌های آن بهبود می‌یابد. نتایج شبیه‌سازی همچنین مؤید آن است که هر چه تعداد مؤلفه‌های متأثر از عامل انحراف در ماتریس کوواریانس کاهش می‌یابد، نمودار کنترل پیشنهادی در زمان طولانی‌تری قادر به شناسایی خروج فرآیند از حالت تحت کنترل است.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۰۵

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۹/۳۰

پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۰۶

ارائه برخط: ۱۴۰۳/۱۱/۰۶

*نویسنده مسئول:

m.maleki@iut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

کنترل کیفیت آماری

نمونه‌گیری دوگانه

ماتریس کوواریانس

داده‌های با ابعاد بالا

نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای

۲۱۹۵-۲۵۳۸/© ۲۰۲۶ نویسندگان. منتشرشده توسط دانشگاه ایوان‌کی. این یک مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) است.

۱- مقدمه

روش نمونه‌گیری دوگانه یک فرآیند پایش دومرحله‌ای برای تصمیم‌گیری در مورد وضعیت فرآیند است که اولین بار توسط کروسدیل (Croasdale, 1974) ارائه شد. وی ایده نمونه‌گیری دوگانه را از ادبیات نمونه‌گیری جهت پذیرش الهام گرفت و آن را در حوزه کنترل کیفیت آماری استفاده نمود. روش ارائه شده توسط کروسدیل (Croasdale, 1974) شامل استفاده از نمونه‌های تصادفی به حجم n_1 و n_2 در مراحل اول و دوم نمونه‌گیری برای محاسبه آمار مورد نظر است که در آن همواره n_2 بزرگ‌تر از n_1 است. داودین و همکاران (Daudin et al., 1990; Daudin, 1999) و داودین نشان دادند که استفاده از اندازه نمونه n_1 در مرحله اول و اطلاعات کسب‌شده از هر دودسته نمونه‌های n_1 و n_2 تایی برای محاسبه مقدار آماره در مرحله دوم منجر به بهبود عملکرد فرآیند پایش ضمن کاهش تعداد اقلام موردنیاز برای بازرسی می‌شود. بنابراین، طیف وسیعی از مطالعات انجام‌شده در زمینه استراتژی نمونه‌گیری دوگانه در جهت بهبود رویکرد ارائه شده در مطالعه داودین (Daudin, 1992) متمرکز شده‌اند.

در ذیل به جدیدترین تحقیقاتی که در زمینه تجهیز نمودارهای کنترل به نمونه‌گیری دوگانه انجام شده است اشاره می‌شود:

ایزی و همکاران (Eizi, 2020) به مقایسه طراحی اقتصادی آماری دو نمودار مبتنی بر نمونه‌گیری تصادفی ساده و دوگانه برای پایش پارامتر شیب پروفایل‌های خطی در فاز ۲ پرداختند. باهدف کاهش متوسط تعداد نمونه موردنیاز جهت تشخیص نوسانات فرآیند، توموهیرو و همکاران (Tomohiro., et al; 2020) یک نمودار کنترل مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه برای پایش شاخص توانایی فرآیند ارائه کردند. روزی و همکاران (Rozi, 2021) به طراحی نمودار $\bar{X}$ مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه اصلاح‌شده با هدف کمینه‌سازی میانه طول دنباله خارج از کنترل با انتخاب مقادیر بهینه برای پارامترهای حد کنترل پرداختند. یک نمودار کنترل $\bar{X}$ مبتنی بر نمونه‌گیری سه‌گانه اصلاح شده در دو حالت بدون و با در نظر گرفتن خطای تخمین پارامتر در فاز ۱ توسط میم و همکاران (Mim et al., 2022) ارائه شد.

ملکی و همکاران (Maleki et al., 2023) اثر پراکندگی اضافی ناشی از خطای اندازه‌گیری در دو حالت واریانس ثابت و خطی افزایشی را بر حساسیت نمودار $\bar{X}$ مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه بررسی کردند. با هدف کشف سریع‌تر تغییرات کوچک، لی و همکاران (Lee et al., 2023) یک نمودار کنترل ضریب تغییرات مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه در فاز ۲ ارائه دادند. شرفی و همکاران (Sharafi et al., 2024) دو نمودار کنترل مربع تی بهبودیافته بر اساس نمونه‌گیری دوگانه برای پایش بردار میانگین فرآیندهای چندمتغیره با در نظر گرفتن اثر خطای سیستم اندازه‌گیری معرفی نمودند. آن‌ها سپس نسخه‌های بهبودیافته‌ای از نمودارهای پیشنهادی بر اساس تکنیک سنجش چندگانه به‌منظور کاهش اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری ارائه نمودند. خوانندگان علاقه‌مند به‌منظور کسب اطلاعات تکمیلی در مورد استراتژی‌های پایش توسعه‌یافته بر مبنای نمونه‌گیری دوگانه به مقاله مروری موتسپا و همکاران (Motsepa et al., 2023) مراجعه نمایند.

از طرف دیگر، با پیشرفت‌های سریع در فناوری سنجش و اندازه‌شناسی، امروزه بسیاری از شرکت‌های تولیدی و خدماتی به‌راحتی قابلیت دسترسی به مشخصه‌های کیفی قابل‌توجهی دارند. پایش آماری و نظارت بر داده‌های ابعاد بالا می‌تواند نقش مؤثری برای تشخیص رفتار غیرنرمال فرآیند و بهبود کیفیت محصول ایفا کند. به‌عنوان مثال، در فرآیندهای تولید قطعات نیمه‌هادی و الکترونیکی، معمولاً تعداد قابل توجهی مشخصه کیفی مورد توجه است که در آن‌ها استفاده از تکنیک‌های کنترل فرآیند آماری توانسته است توانایی فرآیند تولید را از طریق کاهش پراکندگی افزایش دهد (Mason & Young, 2002). همچنین در کاربردهای خدماتی، بسیاری از سازمان‌ها از داده‌کاوی و ابزارهای نظارتی برای درک پروفایل‌های مشتریان با ویژگی‌های ابعادی بالا به‌منظور شناسایی هر چه سریع‌تر رفتارهای متقلبانه استفاده می‌کنند. به‌طور خاص، برای شناسایی تقلب در کارت اعتباری یا بیمه، مجموعه‌ای از هزاران متغیر و تراکنش روزانه مورد پایش قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثالی دیگر، در مدیریت بهداشت عمومی روش‌های نظارتی برای تشخیص و پیشگیری به‌موقع از انواع حوادث نامطلوب بهداشتی توسعه‌یافته است.

یکی از چالش‌های اساسی تکنیک‌های کنترل فرآیند آماری چند متغیره، عدم توانایی آن‌ها در تشخیص سریع خطاهای فرآیند و یا به عبارت دیگر حساسیت پایین آن‌ها به اختلالات فرآیند است. چالش ذکرشده زمانی حیاتی می‌شود که ابعاد جریان‌های داده بالاتر رود که از آن اصطلاحاً به «نفرین ابعاد» یاد می‌شود (Jiang & Tsui, 2008; Wang & Jiang, 2009). در سال‌های اخیر تلاش‌هایی به‌منظور رفع چالش ذکرشده در پایش جریان داده‌های با ابعاد بالا توسط محققین کنترل کیفیت آماری انجام شده است که در ذیل به آن‌ها پرداخته می‌شود.

آوانسوف و بوزون (Avanesov & Buzun, 2018) یک رویکرد جدید برای شناسایی تغییرات ناگهانی در ساختار کوواریانس فرآیندهای با ابعاد بالا مبتنی بر استراتژی بوت‌استرپ غیراستاندارد ارائه دادند. آن‌ها نشان دادند که نمودار کنترل توسعه‌یافته عملکرد بهتری بر حسب نرخ صدور هشدار اشتباه و همچنین توان کشف تغییرات در ماتریس کوواریانس دارد. انیکیوا و هارچوئی (Enikeeva & Harchaoui, 2019) یک رویکرد پایش‌بردار میانگین فرآیندهای نرمال چندمتغیره با ابعاد بالا بدون نیاز به اطلاعاتی در مورد عوامل انحراف ارائه کردند.

به‌منظور کشف تغییرات قطری و غیرقطری در ماتریس کوواریانس فرآیندهای با ابعاد بالا، سلماس‌نیا و همکاران (Salmasnia., 2025) به تجهیز نمودار حد آستانه تطبیقی لاسو به نمونه‌گیری دوگانه پرداختند. صائمیان و همکاران (Saemian et al., 2024) به یکپارچه‌سازی آماره نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای و نمونه‌گیری حالت وابسته چندگانه (MDS) برای کشف هر چه سریع‌تر اختلالات ماتریس کوواریانس فرآیندهای با ابعاد بالا پرداختند. به‌علاوه آن‌ها نسخه بهبودیافته نمودار ارائه شده را با معرفی نمونه‌گیری حالت وابسته چندگانه تعمیم‌یافته (GMDS) توسعه دادند. جعفری و همکاران (Jafari et al., 2022) به مطالعه اثر خطای اندازه‌گیری بر حساسیت نمودار حد آستانه تطبیقی لاسو در پایش ماتریس پراکندگی فرآیندهای با ابعاد بالا پرداختند. آن‌ها سپس رویکرد سنجش چندگانه هر محصول را به‌منظور جبران اثر نامطلوب خطا بر ویژگی‌های طول دنباله نمودار ذکرشده به کار گرفتند. به‌منظور کسب اطلاعات بیش‌تر در زمینه روش‌های نظارت برخط بر فرآیندهای ابعاد بالا به مقاله مروری جلیل‌بال و همکاران (Jalilibal et al., 2024) مراجعه شود.

ادامه ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، پس از معرفی نمادهای مورد استفاده، نمودار کنترل نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای تحت نمونه‌گیری تصادفی ساده تشریح می‌شود. سپس یک طرح پایش ماتریس کوواریانس بر مبنای ترکیب آماره نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای و استراتژی نمونه‌گیری دوگانه توسعه داده می‌شود. اثر استفاده از استراتژی نمونه‌گیری دوگانه بر عملکرد نمودار کنترل توسعه‌یافته با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و بر حسب معیارهای متوسط و انحراف معیار طول دنباله در بخش ۳ مورد توجه قرار می‌گیرد. بخش ۴ به جمع‌بندی نتایج مقاله و بیان یک پیشنهاد کاربردی برای تحقیقات آتی اختصاص می‌یابد.

۲- نمودار پیشنهادی

علیرغم کارایی بالای رویکرد نمونه‌گیری دوگانه در بهبود حساسیت نمودارهای کنترل نسبت به انحراف با دلیل رخداده و کاهش هزینه نمونه‌گیری به‌واسطه اخذ مشاهدات کم‌تر در درازمدت، تمامی نمودارهای کنترل توسعه یافته موجود در ادبیات برای پایش فرآیندهای با ابعاد بالا از نمونه‌گیری تصادفی ساده بهره برده‌اند. نوآوری این مطالعه، تجهیز نمودار کنترل نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای به رویکرد نمونه‌گیری دوگانه برای کشف سریع‌تر تغییرات پراکنده در عناصر ماتریس کوواریانس فرآیندهای با ابعاد بالا است.

در این بخش به دنبال تجهیز نمودار نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای به نمونه‌گیری دوگانه با هدف کشف هر چه سریع‌تر شیفت‌های پله‌ای در مؤلفه‌های ماتریس کوواریانس هستیم. برای این منظور در ابتدا علائم اختصاری مورد استفاده در توسعه نمودار پیشنهادی شامل اندیس‌ها، پارامترهای توزیع و نمونه در ذیل معرفی می‌شوند.

- اندیس‌ها:

t اندیس زیرگروه،

j اندیس مشاهده

k, l اندیس متغیر

- پارامترهای توزیع

p تعداد متغیرها

$\boldsymbol{\mu}$ بردار میانگین متغیرها

$\boldsymbol{\Sigma}_{ic}$ ماتریس کوواریانس در حالت تحت کنترل

σ_k^2 واریانس متغیر k ام

σ_{kl} کوواریانس بین متغیرهای k و l

$\boldsymbol{\Sigma}_{oc}$ ماتریس کوواریانس در حالت خارج از کنترل

$\boldsymbol{\Omega}_{ic}$ ماتریس دقت در شرایط تحت کنترل

- پارامترهای نمودار:

α احتمال خطای نوع ۱

n_1 تعداد مشاهدات در مرحله اول نمونه‌گیری

n_2 تعداد مشاهدات در مرحله دوم نمونه‌گیری

c پارامتر جریمه

h_{inner} حد کنترل درونی نمودار در مرحله اول

h_{outer} حد کنترل بیرونی نمودار در مرحله اول

h_2 حد کنترل نمودار در مرحله دوم

- پارامترهای نمونه:

$\boldsymbol{X}_{t,1}$ ماتریس مشاهدات در مرحله اول زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{x}_{tj,1}$ $\boldsymbol{j}$ امین مشاهده در مرحله اول زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$x_{tjk,1}$ مشاهده j ام مشخصه کیفی $\boldsymbol{k}$ ام در نمونه اخذشده در مرحله اول زیرگروه t ام

$\boldsymbol{X}_{t,2}$ ماتریس مشاهدات در مرحله دوم زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{x}_{tj,2}$ $\boldsymbol{j}$ امین مشاهده در مرحله دوم زیرگروه $\boldsymbol{t}$

L_1 تابع درستنمایی در مرحله اول نمونه‌گیری

$\boldsymbol{S}_{t,1}$ ماتریس کوواریانس مرحله اول در زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{S}_{t,2}$ ماتریس کوواریانس مرحله دوم در زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{MLE}$ برآورد کننده حداکثر درستنمایی ماتریس دقت برای مشاهدات مرحله اول از زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{RPLR}$ برآورد کننده نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای ماتریس دقت برای مشاهدات مرحله اول از زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,2}^{RPLR}$ برآورد کننده نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای ماتریس دقت برای مشاهدات مرحله دوم از زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$RPLR_{t,1}$ آماره مرحله اول از زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$RPLR_{t,2}$ آماره مرحله دوم از زیرگروه $\boldsymbol{t}$

$DSRPLR_t$ آماره ادغام‌شده در زیرگروه $\boldsymbol{t}$

- سایر پارامترها:

$\boldsymbol{I}_p$ ماتریس همانی p بعدی

ARL_{ic} متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل

τ بازه نمونه‌گیری رخداد انحراف با دلیل

T بازه نمونه‌گیری صدور هشدار خارج از کنترل

فرض کنید در شرایطی که فرآیند تحت کنترل است، کیفیت محصول بر حسب p مشخصه کیفی همبسته نرمال با بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}_{ic}$ توصیف می‌شود. فرض می‌شود که انحراف با دلیل صرفاً باعث تغییر در مؤلفه‌های ماتریس کوواریانس شده و میانگین بدون تغییر باقی می‌ماند. به عبارت دیگر درصورتی‌که انحراف با دلیل در بازه نمونه‌گیری τ ام رخ دهد، نمونه‌های $t = 1,\ldots,\tau$ از توزیع نرمال p متغیره با پارامترهای μ و $\boldsymbol{\Sigma}_{ic}$ پیروی کرده در حالی که پارامترهای توزیع برای نمونه‌های $t = \tau + 1, \tau + 2, \ldots, T$ به‌صورت $\boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{oc}$ خواهد بود. لازم به ذکر است که T شماره زیرگروهی است که نمودار یک هشدار خارج از کنترل صادر می‌کند. در این صورت، بررسی وضعیت پراکندگی فرآیند در هر زیرگروه معادل با انجام آزمون فرضیه زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &H_0: \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_{ic} \\ &H_1: \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{ic} \end{aligned} \qquad (۱)$$

برای انجام آزمون ۱ با استفاده از روش دو مرحله‌ای پیشنهادی، ابتدا در هر زیرگروه یک نمونه تصادفی n_1 تایی به صورت $\boldsymbol{X}_{t,1} = (\boldsymbol{x}_{t1,1}, \boldsymbol{x}_{t2,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{tn_1,1})_{p\times n_1}$ اخذ می‌شود که در آن $\boldsymbol{x}_{tj,1} = (x_{tj1,1}, x_{tj2,1}, \ldots, x_{tjp,1})^T$ بیانگر بردار ستونی حاوی مقادیر مشخصه‌های کیفی در مشاهده j ام است. تابع درستنمایی مشاهدات در مرحله اول نمونه‌گیری بر مبنای بردارهای ستونی $\boldsymbol{x}_{t1,1}, \boldsymbol{x}_{t2,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{tn_1,1}$ به صورت رابطه ۲ نوشته می‌شود:

$$L_1(\boldsymbol{x}_{t1,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{tn_1,1} | \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi n_1)^{\frac{p}{2}}} |\boldsymbol{\Omega}|^{0.5} e^{-\sum_{j=1}^{n_1}(x_{tj,1}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Omega} (x_{tj,1}-\boldsymbol{\mu})} \qquad (۲)$$

با توجه به تابع ۲، برآوردگر حداکثر درستنمایی ماتریس دقت با حل مساله برنامه‌ریزی ۳ حاصل می‌شود:

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{MLE} = \underset{\boldsymbol{\Omega}}{argmin} \{ tr(\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{S}_{t,1}) - log|\boldsymbol{\Omega}| \} \qquad (۳)$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{S}_{t,1}$ نشان‌دهنده ماتریس کوواریانس $p \times p$ نمونه‌ای در مرحله اول نمونه‌گیری در زیر $\boldsymbol{t}$ ام بوده و به‌صورت رابطه ۴ محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{S}_{t,1} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} (\boldsymbol{x}_{tj,1} - \boldsymbol{\mu}) (\boldsymbol{x}_{tj,1} - \boldsymbol{\mu})^T \qquad (۴)$$

با حل مدل ریاضی ۳، برآورد کننده حداکثر درستنمایی ماتریس دقت در مرحله اول زیرگروه t برابر معکوس ماتریس کوواریانس نمونه‌ای آن خواهد بود یعنی $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_t^{MLE}=\boldsymbol{S}_t^{-1}$ در بسیاری از کاربردهای کنترل کیفیت آماری به دلیل محدودیت‌های زمانی و اقتصادی، اندازه نمونه نمی‌تواند از بعد مساله فراتر رود. در این شرایط تخمین ماتریس دقت با روش حداکثر درستنمایی به دلیل عدم معکوس‌پذیری ماتریس کوواریانس نمونه‌ای قابل‌استفاده نیست. بنابراین در این مقاله روش نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای برای تخمین ماتریس دقت پیشنهاد می‌شود که مقدار آن با حل برنامه‌ریزی ریاضی ۵ به‌دست می‌آید. مدل ذکرشده بر اساس اضافه کردن جز جریمه نرم ۲، به مدل برنامه‌ریزی ۳ حاصل می‌شود:

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{RPLR}=\underset{\boldsymbol{\Omega}}{argmin}\left\{tr(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{S}_{t,1})-log|\boldsymbol{\Omega}|+\frac{c}{2}\|\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}_{ic}\|\right\} \quad (۵)$$

با حل برنامه‌ریزی ریاضی ۵، برآورد ماتریس دقت در مرحله اول نمونه‌گیری مطابق با رابطه ۶ خواهد بود.

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{RPLR}=\left\{\left(c\boldsymbol{I}_p+0.25(\boldsymbol{S}_t-c\boldsymbol{\Omega}_{ic})^2\right)^{0.5}+\frac{(\boldsymbol{S}_t-c\boldsymbol{\Omega}_{ic})}{2}\right\}^{-1} \quad (۶)$$

مشاهده می‌شود که تخمین ماتریس دقت با روش نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای برخلاف روش حداکثر درستنمایی نیازمند محاسبه معکوس ماتریس کوواریانس نمونه‌ای نیست. بعد از برآورد ماتریس دقت بر اساس رابطه ۶، آماره نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای در مرحله اول زیرگروه t ام به شرح زیر قابل محاسبه است:

$$RPLR_{t,1}=tr(\boldsymbol{\Omega}_{ic}\boldsymbol{S}_{t,1})+ln|\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{RPLR}|-ln|\boldsymbol{\Omega}_{ic}|-tr(\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,1}^{RPLR}\boldsymbol{S}_{t,1}) \quad (۷)$$

در رابطه ۷، عملگر $tr(.)$ حاصل جمع عناصر قطر اصلی ماتریس ورودی را محاسبه می‌کند. دامنه تغییرات آماره $RPLR_{t,1}$ مطابق با شکل **۱** به سه ناحیه پذیرش، هشدار و ردافراز می‌شود. در شکل **۱**، h_{inner} ، h_{outer} و h_2 به ترتیب نشان‌دهنده حد کنترل درونی مرحله اول، حد کنترل بیرونی مرحله اول و حد کنترل مرحله دوم هستند. با توجه به مقدار آماره محاسبه شده در مرحله اول، اقدامات متفاوتی به شرح زیر اجرا می‌شود:

۱- اگر آماره در ناحیه پذیرش قرار گیرد یعنی $RPLR_{t,1}\le h_{inner}$ باشد، فرآیند در مرحله اول تحت کنترل قلمداد شده و نیازی به نمونه اضافی در مرحله دوم نیست.

۲- اگر آماره در ناحیه رد واقع شود یعنی $RPLR_{t,1}>h_{outer}$ باشد، نیازی به اخذ نمونه دیگری در زیرگروه t وجود نداشته و یک هشدار توسط نمودار صادر می‌شود. سپس اقدامات اصلاحی برای شناسایی و رفع عامل انحراف اجرا می‌شود تا ماتریس کوواریانس فرآیند مجدداً به وضعیت تحت کنترل بازگردانده شود.

۳- در صورتی که هیچ یک از حالت‌های دوگانه بالا رخ ندهد و آماره مرحله اول در ناحیه هشدار $(h_{inner},h_{outer}]$ قرار گیرد، تصمیم‌گیری در مرحله اول میسر نیست. در این صورت $RPLR_{t,1}$ بر مبنای مقدار تصمیم‌گیری به مرحله دوم منتقل‌شده و نمونه تصادفی به حجم n_2 به‌صورت $\boldsymbol{X}_{t,2}=(\boldsymbol{x}_{t1,2},\boldsymbol{x}_{t2,2},...,\boldsymbol{x}_{tn_2,2})_{p\times n_2}$ بلافاصله از فرآیند تهیه‌شده و چهار گام زیر دنبال می‌شود:

۳-۱- محاسبه ماتریس کوواریانس نمونه‌ای به‌صورت $\boldsymbol{S}_{t,2}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(\boldsymbol{x}_{tj,2}-\mu)(\boldsymbol{x}_{tj,2}-\mu)^T$.

۳-۲- تخمین ماتریس دقت با استفاده از برآورد کننده نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای به‌صورت زیر.

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,2}^{RPLR}=\left\{\left(c\boldsymbol{I}_p+0.25(\boldsymbol{S}_{t,2}-c\boldsymbol{\Omega}_{ic})^2\right)^{0.5}+\frac{(\boldsymbol{S}_{t,2}-c\boldsymbol{\Omega}_{ic})}{2}\right\} \quad (۸)$$

۳-۳- محاسبه آماره مرحله دوم نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای در زیرگروه t ام به‌صورت

$$RPLR_{t,2}=tr(\boldsymbol{\Omega}_{ic}\boldsymbol{S}_{t,2})+ln|\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,2}^{RPLR}|-ln|\boldsymbol{\Omega}_{ic}|-tr(\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,2}^{RPLR}\boldsymbol{S}_{t,2}) \quad (۹)$$

۳-۴- محاسبه آماره ادغام‌شده نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای در زیرگروه t بر اساس مقادیر $RPLR_{t,1}$ و $RPLR_{t,2}$ با استفاده از رابطه ۱۰:

$$DSRPLR_t=\frac{n_1\times RPLR_{t,1}+n_2\times RPLR_{t,2}}{n_1+n_2} \quad (۱۰)$$

مطابق با شکل **۱**، دامنه تغییرات آماره $DSRPLR_t$ دربرگیرنده دو ناحیه پذیرش و رد است. در صورتی که آماره ادغام‌شده کم‌تر یا مساوی h_2 باشد، فرآیند تحت کنترل و در غیر این صورت خارج از کنترل اعلام می‌شود.

مقادیر سه حد کنترل h_{inner} ، h_{outer} و h_2 به‌گونه‌ای تنظیم می‌شوند که متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر با $ARL_{ic}=\frac{1}{\alpha}$ باشد که در آن α احتمال خطای نوع ۱ آزمون ۱ است. نمودار پیشنهادی در شکل **۲** به تصویر کشیده شده است

۳- ارزیابی عملکرد

در این بخش یک مثال عددی مبتنی بر شبیه‌سازی به‌منظور ارزیابی توان نمودار پیشنهادی مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه در کشف تغییرات ماتریس کوواریانس ارائه می‌شود. در مثال موردنظر فرض می‌شود که کیفیت محصول یا خروجی فرآیند برحسب $p=10$ مشخصه کیفی نرمال توصیف می‌شود. در شرایطی که فرآیند تحت کنترل باشد بردار میانگین برابر با $\boldsymbol{\mu}_{10\times1}=(0,0,\ldots,0)^T$ و ماتریس کوواریانس به‌صورت $\boldsymbol{\Sigma}_{ic}=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین پارامتر ضریب جریمه نمودار کنترل پیشنهادی برابر $c=10$ تنظیم‌شده در حالی که اندازه نمونه در مراحل اول و دوم نمونه‌گیری به ترتیب برابر با $n_1=4$ و $n_2=8$ در نظر گرفته می‌شوند. با توجه به پارامترهای در نظر گرفته شده حدود کنترل درونی و بیرونی نمودار در مرحله اول و حد کنترل در مرحله دوم به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که احتمال خطای نوع اول برابر با $\alpha=0.005$ یا به‌طور معادل متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل برابر $ARL_{ic}=200$ شود.

برای این منظور بر اساس ۲۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی، مقادیر سه حد کنترل نمودار برابر با $h_{inner}=2.4830$، $h_{outer}=۶/۲۰۷۶$ و $h_2=۵/۵۸۶۸$ تعیین می‌شوند. سپس عملکرد نمودار پیشنهادی در کشف تغییرات پایدار ماتریس کوواریانس با تعریف هفت الگوی خارج از کنترل به شرح زیر و بر حسب چهار شاخص متوسط طول دنباله، انحراف معیار طول دنباله، میانه طول دنباله و همچنین امید ریاضی اندازه نمونه ارزیابی می‌شود. لازم به ذکر است که الگوهای خارج از کنترل به سه دسته الگوی توأم قطری/غیرقطری روابط ۱۱ تا ۱۳، قطری روابط ۱۴ و ۱۵ و غیرقطری ۱۶ و ۱۷ تقسیم شده و هر دسته شامل شیفت‌های پراکنده و غیرپراکنده در ماتریس کوواریانس می‌شود.

$$\sigma_k^2=1+\delta^2; k=1,\ldots,10 \text{ and } \sigma_{kl}=\delta; k,l=1,\ldots,10 \;\&\; k\neq l \quad (۱۱)$$

$$\sigma_k^2=1+\delta^2; k=1,\ldots,5 \text{ and } \sigma_{kl}=\delta; k,l=1,\ldots,5 \;\&\; k\neq l \quad (۱۲)$$

$$\sigma_k^2=1+\delta^2; k=1,2 \text{ and } \sigma_{12}=\sigma_{21}=\delta \quad (۱۳)$$

$$\sigma_k^2=1+\delta^2; k=1,\ldots,10 \quad (۱۴)$$

$$\sigma_1^2=1+\delta^2 \quad (۱۵)$$

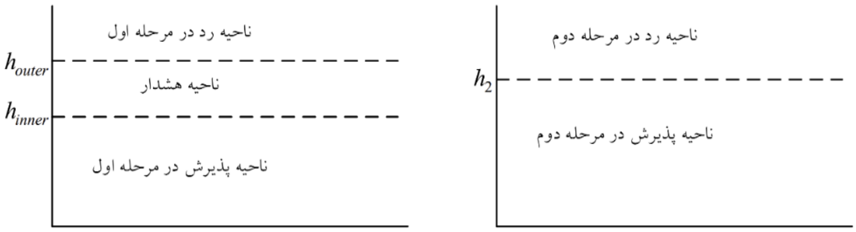
$$\sigma_{kl}=\delta; k,l=1,\ldots,5 \;\&\; k\neq l \quad (۱۶)$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\delta \quad (۱۷)$$

عملکرد نمودار پیشنهادی در شناسایی عوامل انحراف که منجر به تغییرات توأم قطری/غیرقطری در ماتریس کوواریانس می‌شوند، برحسب چهار شاخص متوسط طول دنباله ARL ، انحراف معیار طول دنباله SDRL میانه طول دنباله MRL و متوسط اندازه نمونه $E(N)$ در جداول **۱** الی **۳** ارزیابی شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که نمودار نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه عملکرد مناسبی در کشف تغییرات توأم قطری/غیرقطری از خود نشان می‌دهد. همچنین، مطابق انتظار با افزایش بزرگی شیفت در مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی، حساسیت نمودار پیشنهادی در کشف تغییرات بهبودیافته و مقدار هر سه شاخص ARL ، SDRL و MRL با افزایش بزرگی شیفت کاهش می‌یابند. به‌عنوان مثال در الگوی ۱، متوسط طول دنباله با افزایش δ از ۰ به ۰/۲، ۰/۳، ۰/۴، ۰/۵، ۰/۶ و ۰/۷۵ به ترتیب از ۱۹۹/۳۶۴۶ به ۲۲/۴۰۴۴، ۹/۳۸۰۱، ۵/۱۴۶۸، ۳/۲۹۶۵، ۲/۳۵۵۴ و ۱/۶۷۸۲ کاهش می‌یابد. یادآوری می‌شود که الگوهای ۱ و ۲ از نوع توأم قطری/غیرقطری غیر پراکنده بوده در حالی که الگوی ۳ الگوی توأم پراکنده است. به‌علاوه هر چه تعداد مؤلفه‌های خارج از کنترل در ماتریس کوواریانس کاهش می‌یابد، نمودار پیشنهادی در زمان بیش‌تری اختلال در فرآیند را شناسایی می‌کند. به عبارت دیگر، توان نمودار در کشف شیفت‌های پراکنده به‌طور ملموس کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال تحت $\delta=0.3$ ، زمانی که تمامی عناصر تحت تأثیر عامل انحراف قرار می‌گیرند (الگوی ۱)، نمودار پیشنهادی به‌طور متوسط

در ۹/۳۸۰۱ امین نمونه بعد از انحراف با دلیل آن را تشخیص می‌دهد. حال‌آنکه تحت شرایطی که ۲۵ و ۴ در صد از مؤلفه‌ها تغییر نمایند، نمودار پیشنهادی به‌طور متوسط به ترتیب در ۳۹/۰۸۶۶ و ۱۳۰/۹۷۸۶ امین نمونه بعد از شیفت آن را کشف می‌کند.

با مقایسه امید ریاضی اندازه نمونه در جداول **۱** تا **۳** مشاهده می‌شود که در الگوهای خارج از کنترل ۲ و ۳ با افزایش بزرگی شیفت، امید ریاضی اندازه نمونه افزایش می‌یابد، اگر چه این افزایش در الگوی خارج از کنترل شماره ۳ به‌عنوان یک الگوی پراکنده به‌مراتب محسوس‌تر است. دلیل این موضوع آن است که تحت الگوی پراکنده شماره ۳، با افزایش بزرگی شیفت احتمال قرار گرفتن آماره در ناحیه هشدار بیش‌تر شده و در مواردی بیش‌تری نمونه دوم اخذ خواهد شد. در نقطه مقابل در الگوی خارج از کنترل ۱ به‌عنوان یک الگوی کاملاً غیر پراکنده، با افزایش بزرگی شیفت امیدریاضی اندازه نمونه تقریباً ثابت با یک کاهش غیرمعنادار خواهد بود.



شکل ۱. نواحی تصمیم‌گیری نمودار کنترل پیشنهادی.

Figure 1. Decision regions of the proposed control chart.

جدول ۱. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۱

Table 1. Statistical performance of the proposed chart under out-of-control scenario #1

شاخص	δ						
	۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۲۲/۴۰۴۴	۹/۳۸۰۱	۵/۱۴۶۸	۳/۲۹۶۵	۲/۳۵۵۴	۱/۶۷۸۲
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۲۱/۹۲۰۳	۸/۸۹۸۵	۴/۶۸۰۷	۲/۷۵۴۴	۱/۷۹۲۷	۱/۰۹۳۱
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۶/۸۴۹۳	۶/۸۳۱۸	۶/۷۸۵۳	۶/۶۸۶۲	۶/۶۴۱۶	۶/۴۶۱۹
MRL	۱۳۹	۱۶	۷	۴	۲	۲	۱

جدول ۲. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۲

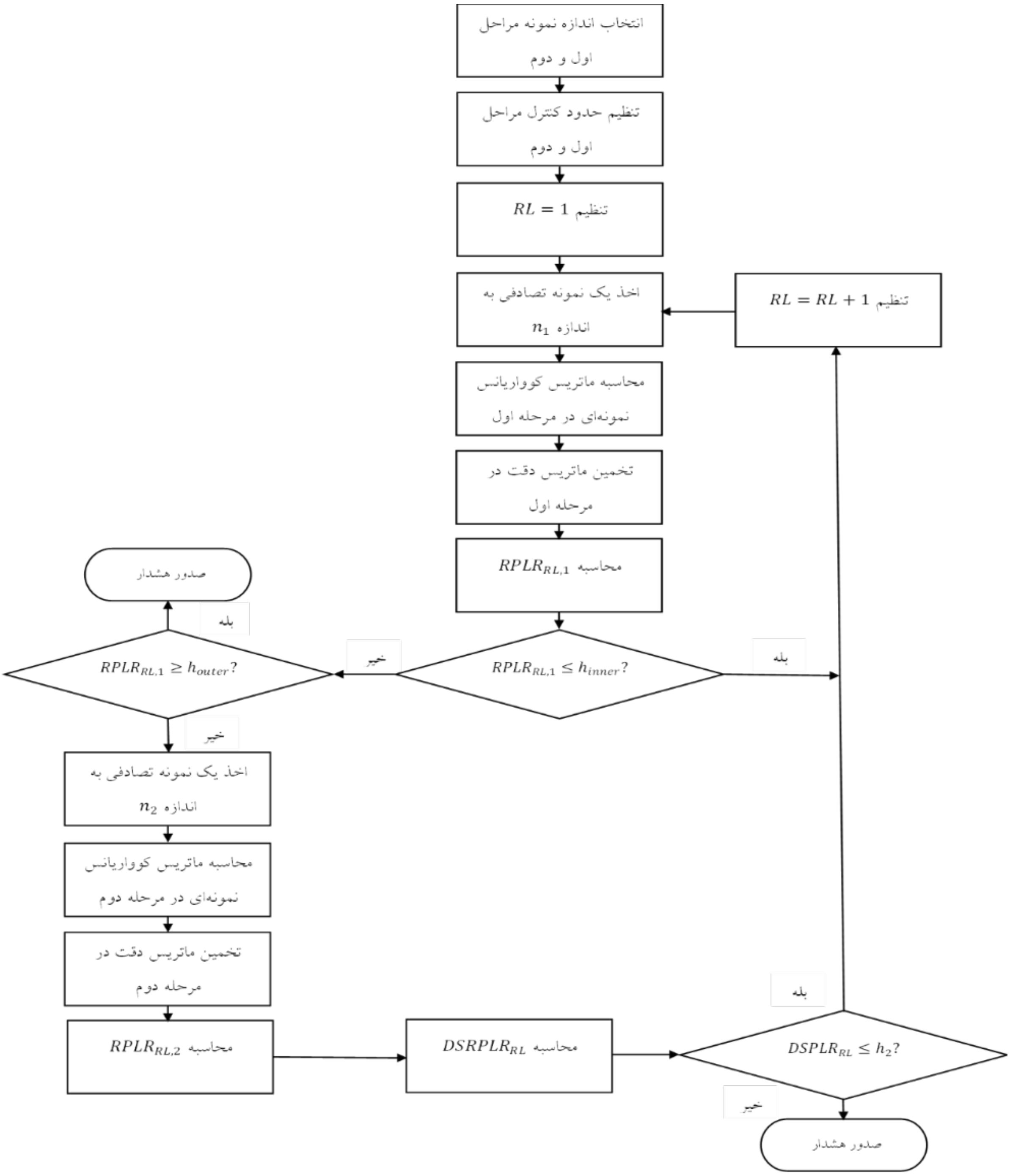
Table 2. Statistical performance of the proposed chart under out-of-control scenario #2

شاخص	δ						
	۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۷۸/۹۳۳۹	۳۹/۰۸۶۶	۲۰/۳۸۹۵	۱۱/۸۲۵۱	۷/۶۴۹۷	۴/۲۵۹۳
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۷۸/۰۴۶۳	۳۸/۷۵۳۷	۱۹/۹۸۶۴	۱۱/۳۸۲۶	۷/۱۳۱۷	۳/۶۹۸۸
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۶/۸۵۳۸	۷/۰۲۱۳	۷/۱۵۰۵	۷/۲۱۹۱	۷/۲۵۱۵	۷/۲۰۶۵
MRL	۱۳۹	۵۵	۲۷	۱۴	۸	۵	۳

جدول ۳. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۳

Table 3. Statistical performance of the proposed chart under the out-of-control scenario #3

شاخص	δ						
	۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۱۶۳/۵۲۴۹	۱۳۰/۹۷۸۶	۹۷/۹۵۲۳	۶۶/۹۷۵۴	۴۶/۰۶۲۴	۲۵/۵۶۵۱
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۱۶۴/۰۴۵۰	۱۳۱/۷۳۷۷	۹۶/۷۰۶۸	۶۷/۸۹۶۳	۴۵/۴۹۱۱	۲۵/۲۸۷۱
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۶/۷۰۱۹	۶/۸۱۸۹	۶/۹۶۴۹	۷/۱۳۴۸	۷/۲۹۷۱	۷/۵۲۱۲
MRL	۱۳۹	۱۱۵	۹۱	۶۸	۴۶	۳۲	۱۸



شکل ۲. فلوچارت روش پیشنهادی.

Figure 2. Flowchart of the proposed method**.**

جدول ۴. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۴

Table 4. Statistical performance of the proposed chart under out-of-control scenario #4

شاخص	δ						
	۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۱۱۴/۹۶۱۴	۶۴/۶۷۶۳	۳۱/۳۹۴۶	۱۵/۰۴۱۲	۸/۲۸۴۴	۳/۱۱۵۲
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۱۱۵/۲۸۴۲	۶۴/۴۰۰۲	۳۰/۸۷۵۳	۱۴/۵۷۷۳	۷/۵۹۲۳	۲/۵۷۷۰
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۷/۰۲۸۷	۷/۵۱۹۶	۸/۰۴۳۸	۸/۳۵۰۹	۸/۱۷۰۱	۷/۳۷۴۸
MRL	۱۳۹	۷۹	۴۵	۲۲	۱۱	۵	۲

جدول ۵. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۵

Table 5. Statistical performance of the proposed chart under out-of-control scenario #5

شاخص	δ ۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۱۸۶/۲۰۴۸	۱۷۲/۷۶۳۱	۱۵۳/۶۲۵۸	۱۳۱/۱۳۹۵	۱۰۹/۴۱۲۶	۷۷/۰۸۶۸
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۱۸۵/۸۸۳۶	۱۶۹/۶۲۶۹	۱۵۴/۱۶۵۱	۱۳۲/۶۳۷۴	۱۰۹/۴۳۲۰	۷۶/۶۷۴۸
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۶/۶۵۰۲	۶/۷۱۲۹	۶/۷۷۳۵	۶/۸۸۹۳	۷/۰۰۲۸	۷/۲۰۴۰
MRL	۱۳۹	۱۲۹	۱۲۱	۱۰۶	۸۹	۷۵	۵۴

جدول ۶. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۶

Table 6. Statistical performance of the proposed chart under out-of-control scenario #6

شاخص	δ ۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۹۵/۰۳۵۲	۵۵/۴۶۵۶	۳۲/۱۳۳۱	۲۰/۹۸۸۳	۱۴/۸۱۶۳	۹/۳۳۶۵
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۹۴/۸۳۳۶	۵۴/۷۶۵۳	۳۱/۶۱۱۳	۲۰/۲۲۱۷	۱۴/۳۴۵۷	۸/۹۰۱۳
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۶/۶۴۰۲	۶/۶۷۷۵	۶/۶۵۶۷	۶/۶۵۵۵	۶/۶۰۲۰	۶/۵۴۱۲
MRL	۱۳۹	۶۷	۳۹	۲۳	۱۵	۱۱	۶

جدول ۷. عملکرد آماری نمودار پیشنهادی تحت سناریوی خارج از کنترل شماره ۷

Table 7. Statistical performance of the proposed chart under out-of-control scenario #7

شاخص	δ ۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷۵
ARL	۱۹۹/۳۶۴۶	۱۸۲/۸۸۱۱	۱۶۷/۹۱۵۷	۱۵۱/۳۱۱۹	۱۳۳/۲۰۱۷	۱۱۲/۷۷۹۲	۹۱/۴۸۱۴
$SDRL$	۱۹۸/۱۱۴۵	۱۸۱/۴۹۳۱	۱۶۸/۳۹۲۹	۱۵۱/۸۲۰۸	۱۳۲/۲۵۳۱	۱۱۱/۹۲۶۵	۹۱/۸۳۴۲
$E(N)$	۶/۶۰۲۳	۶/۶۲۲۹	۶/۶۳۶۱	۶/۶۴۸۷	۶/۶۸۰۴	۶/۷۰۹۷	۶/۷۴۷۲
MRL	۱۳۹	۱۲۸	۱۱۸	۱۰۴	۹۳	۷۸	۶۳

نتایج شبیه‌سازی حاصل از دو الگوی قطری در جداول **۴** و **۵** ارائه شده‌اند. یادآوری می‌شود که الگوی ۴ یک الگوی غیرپراکنده محسوب می‌شود، در حالی که الگوی ۵ یک الگوی پراکنده قطری است. نتایج نشان می‌دهد در الگوی ۴، با افزایش بزرگی شیفت از صفر تا ۰/۵ شاخص امید ریاضی اندازه نمونه یک روند افزایشی به خود می‌گیرد. به‌طور معکوس با افزایش δ از ۰/۵ به ۰/۶ و ۰/۷۵، به‌واسطه آن‌که نمودار کنترل به‌راحتی وضعیت خارج از کنترل را تشخیص می‌دهد، احتمال اخذ نمونه دوم کم‌تر می‌شود. بنابراین امید ریاضی اندازه نمونه تحت شیفت‌های بزرگ نسبت به شیفت‌های کوچک کاهش می‌یابد. در نقطه مقابل، امید ریاضی اندازه نمونه هنگام رخداد یک انحراف با دلیل که منجر به شیفت در ماتریس کوواریانس تحت الگوی خارج از کنترل پراکنده شماره ۵ می‌شود، با افزایش δ همواره یک روند افزایشی را مشابه با الگوی پراکنده ۳ طی می‌کند. نتایج ارائه شده در جداول **۴** و **۵** مؤید این قضیه هستند که توان نمودار کنترل پیشنهادی در کشف شیفت‌های غیرپراکنده قطری به‌مراتب بیش‌تر از شیفت‌های پراکنده است. به‌عنوان مثال، تحت بزرگی شیفت ۰/۴، مقادیر متوسط، انحراف معیار و میانه طول دنباله هنگام رخداد الگوی ۴ به ترتیب برابر با ۳۱/۳۹۴۶، ۳۰/۸۷۵۳ و ۲۲ هستند. در حالی که مقادیر شاخص‌های ذکرشده تحت شرایط ثابت $\delta = 0.4$ در الگوی ۵ به ترتیب برابر با ۱۵۳/۶۲۵۸، ۱۵۴/۱۶۵۱ و ۱۰۶ حاصل شده‌اند. نتایج ارائه شده در جداول **۶** و **۷** به ترتیب اطلاعات مرتبط با عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی تحت الگوهای خارج از کنترل غیرقطری ۶ و ۷ را نمایش می‌دهند. از آن جایی که الگوی خارج از کنترل ۶ یک الگوی غیرپراکنده و الگوی شماره ۷ یک الگوی پراکنده محسوب می‌شود روندهای مشاهده شده در جداول **۶** و **۷**

به ترتیب کاملاً مشابه با نتایج حاصل از رخداد الگوهای خارج از کنترل ۴ و ۵ هستند.

۴- نتیجه‌گیری

نمودارهای چندمتغیره موجود برای نظارت بر فرآیندهای ابعاد بالا صرفاً زمانی قابل استفاده هستند که تعداد متغیرها از اندازه نمونه کم‌تر باشد. به‌علاوه، نمودارهای چندمتغیره موجود عملکرد مناسبی در کشف تغییرات پراکنده ماتریس کوواریانس از خود نشان نمی‌دهند. موضوع مهم دیگر آن است که کشف دیرهنگام تغییرات ماتریس کوواریانس فرآیند با ابعاد بالا باعث بالا رفتن هزینه‌های زیان کیفی مانند دوباره‌کاری و وارانتی شده و عدم رضایت مشتریان را در پی دارد. در این مقاله، یک نمودار نسبت درستنمایی تاوانیده لبه‌ای مبتنی بر نمونه‌گیری دوگانه برای پایش فرآیندهای ابعاد بالا در فاز ۲ ارائه شد که توانایی شناسایی تغییرات پراکنده و غیرپراکنده را دارد. با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو در هفت سناریو، عملکرد این نمودار با شاخص‌هایی مانند طول دنباله و اندازه نمونه بررسی شد. نتایج نشان داد که نمودار پیشنهادی عملکرد مناسبی در تمامی سناریوها و شاخص‌ها دارد. پیاده‌سازی نمودار پیشنهادی به‌منظور نظارت بر خروجی توربین‌های بادی می‌تواند به‌عنوان یک پیشنهاد کاربردی راه‌گشای مدیران این صنعت در کاهش هزینه‌های کیفی شود.

مشارکت‌های نویسندگان

همه نویسندگان در مقاله نقش و سهم یکسان داشته‌اند.

تضاد منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تضاد منافع مرتبط با تحقیق حاضر ندارند و نتایج به‌صورت بی‌طرفانه و بدون دخالت منافع شخصی یا حرفه‌ای به‌دست‌آمده است.

قدردانی

نویسندگان از عوامل اجرایی نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری و همچنین داوران محترم که کیفیت این مقاله را افزایش دادند، قدردانی می‌نمایند.

مراجع

Avanesov, V., & Buzun, N. (2018). Change-point detection in high-dimensional covariance structure. *Electronic Journal of Statistics, 12*(2), 3254–3294. https://doi.org/10.1214/18-EJS1484

Croasdale, R. (1974). Control charts for a double-sampling scheme based on average production run lengths. *International Journal of Production Research, 12*(5), 585–592. https://doi.org/10.1080/00207547408919577

Daudin, J. J. (1992). Double sampling X̄ charts. *Journal of Quality Technology, 24*(2), 78–87. https://doi.org/10.1080/00224065.1992.12015231

Daudin, J. J., Duby, C., & Trécourt, P. (1990). Plans de contrôle double optimaux (maîtrise des procédés et contrôle de réception). *Revue de Statistique Appliquée, 38*(4), 45–59.

Eizi, A., Sadeghpour Gildeh, B., & Monabbati, S. E. (2020). Comparison between two methods of the economic-statistical design of profile monitoring under the double sampling scheme. *Journal of Statistical Computation and Simulation, 90*(18), 3400–3421. https://doi.org/10.1080/00949655.2020.1803319

Enikeeva, F., & Harchaoui, Z. (2019). High-dimensional change-point detection under sparse alternatives. *Annals of Statistics, 47*(4), 2051–2079. https://doi.org/10.1214/18-AOS1740

Jafari, M., Maleki, M. R., & Salmasnia, A. (2023). A high-dimensional control chart for monitoring process variability under gauge imprecision effect. *Production Engineering, 17*(3–4), 547–564. https://doi.org/10.1007/s11740-023-01195-y

Jalilibal, Z., Karavigh, M. H. A., Maleki, M. R., & Amiri, A. (2024). Control charting methods for monitoring high-dimensional data streams: A conceptual classification scheme. *Computers & Industrial Engineering, 191*, Article 110141. https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110141

Jiang, W., & Tsui, K. L. (2008). A theoretical framework and efficiency study of multivariate statistical process control charts. *IIE Transactions, 40*(7), 650–663. https://doi.org/10.1080/07408170701745352

high-dimensional data streams. *Journal of Industrial Integration and Management, 8*(3), 365–386. https://doi.org/10.1142/S242486222350001X

Sharafi, S., Khanbeygi, P., Maleki, M. R., & Salmasnia, A. (2024). A double-sampling approach for multivariate control charting using multiple measurement strategy and simulation. *International Journal of Management and Decision Making, 23*(2), 137–153. https://doi.org/10.1504/IJMDM.2024.137004

Tomohiro, R., Arizono, I., & Takemoto, Y. (2020). Economic design of double sampling Cpm control chart for monitoring process capability. *International Journal of Production Economics, 221*, Article 107468. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2019.08.003

Wang, K., & Jiang, W. (2009). High-dimensional process monitoring and fault isolation via variable selection. *Journal of Quality Technology, 41*(3), 247–258. https://doi.org/10.1080/00224065.2009.11917780

Lee, P. H., Torng, C. C., Jhong, H. R., & Chou, C. Y. (2023). Monitoring the coefficient of variation using a double-sampling control chart. *Communications in Statistics–Simulation and Computation, 52*(10), 4849–4863. https://doi.org/10.1080/03610918.2021.1971242

Maleki, M. R., Shamseddin, B., Eghbali, H., & Bazdar, A. (2023). The effect of gauge measurement errors on double sampling $\bar{X}$ control chart. *Communications in Statistics–Theory and Methods, 52*(8), 2702–2717. https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1958848

Mason, R. L., & Young, J. C. (2002). *Multivariate statistical process control with industrial applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898718461

Mim, F. N., Khoo, M. B. C., Saha, S., & Castagliola, P. (2022). Revised triple sampling $\bar{X}$ control charts for the mean with known and estimated process parameters. *International Journal of Production Research, 60*(16), 4911–4935. https://doi.org/10.1080/00207543.2021.1943035

Motsepa, C. M., Malela-Majika, J.-C., Castagliola, P., & Shongwe, S. C. (2023). Double sampling monitoring schemes: A literature review and some future research ideas. *Communications in Statistics–Simulation and Computation, 52*(8), 3391–3419. https://doi.org/10.1080/03610918.2021.1939375

Rozi, F., Pasaribu, U. S., Mukhaiyar, U., & Irianto, D. (2021). Optimal design of a revised double sampling $\bar{X}$ chart based on median run length. *Journal of Hunan University Natural Sciences, 48*(7), 1–12.

Saemian, M., Salmasnia, A., & Maleki, M. R. (2022). A generalized multiple dependent state sampling chart based on ridge penalized likelihood ratio for high-dimensional covariance matrix monitoring. *Scientia Iranica, 29*(6), 3313–3328. https://doi.org/10.24200/SCI.2022.60169.6640

Salmasnia, A., Maleki, M. R., & Mirzaei, M. (2023). Double sampling adaptive thresholding LASSO variability chart for Phase II monitoring of